УДК 539.3+681.3.06

Ковальчук С.Б., викладач
Полтавська державна аграрна академія

УЗАГАЛЬНЕННЯ РОЗРАХУНКОВИХ МЕТОДІВ У ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ ДЕФОРМУВАННЯ БРУСІВ

ПОВІДОМЛЕННЯ 2. АНАЛІЗ ТА ЗАСТОСУВАННЯ[1]

Рецензент – доктор технічних наук, професор В.П. Дмитриков

Подано аналіз структури, отриманого у повідомленні 1 загального виразу, що є розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння довільного порядку із самоспряженим диференціальним оператором і відповідає прямому методу граничних елементів. Підбором крайових умов, яким повинна відповідати узагальнена функція Гріна, загальний вираз був приведений у відповідність до методів початкових і кінцевих параметрів. Застосування отриманих виразів показане на прикладі класичної моделі плоского поперечного згину брусів.

***Ключові слова**: лінійний диференціальний оператор, фундаментальний розв'язок, крайова умова, функція Хевісайда, функція Гріна.*

Постановка проблеми. Визначення компонентів напружено-деформованого стану в межах численних моделей деформування брусів зводиться до розв'язання одновимірної крайової задачі. Ефективним підходом до розв'язання такого роду задач є різні аналітичні методи розрахунку, такі як метод початкових параметрів, метод граничних елементів та метод кінцевих параметрів. Тому важливою є розробка й узагальнення таких методів для нових моделей деформування.

Аналіз існуючих досліджень. Отримання та застосування методу початкових параметрів до розв'язання задач деформування брусів досить широко висвітлено, наприклад, у [3]. Одновимірний варіант прямого методу граничних елементів, у застосуванні для розв'язання задач згину брусів, описано в [1]. Метод кінцевих параметрів, для першого кроку ітераційної зсувної моделі згину композитних брусів, описаний у роботі [2]. У даних роботах розглянуто отримання та застосування згаданих аналітичних методів стосовно конкретних моделей деформування, однак при цьому відсутній спільний підхід в отримані вихідних рівнянь. Хоча у повідомленні 1 і розроблений такий підхід, але не наведена конкретна методика щодо його застосування до тих чи інших (передусім нових) задач.

Мета та завдання досліджень. Провести аналіз отриманого загального виразу функції переміщень, який відповідає методу граничних елементів, і виділити випадки функцій Гріна, що приводять його у відповідність методам початкових та кінцевих параметрів.

Матеріали і методи досліджень. Теоретичне дослідження властивостей отриманого загального розв'язку крайової задачі в залежності від узагальненої функції Гріна.

Результати досліджень. У повідомленні 1 подано теоретичні передумови загального підходу методів початкових параметрів, кінцевих параметрів та прямого методу граничних елементів у застосуванні до одновимірних задач механіки деформування брусів. Для таких задач визначення функції переміщень, у більшості випадків, зводиться до розв'язання лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку із самоспряженим диференціальним оператором (16):

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_2 y^{(n-2)}(x) + \ldots + a_n y(x) = \Omega(x). \tag{20}$$

Результатом проведених теоретичних досліджень стало отримання загального розв'язку (19), який повторимо тут для зручності подальшого викладу матеріалу:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j y^{(n-j)}(s) \left(\sum_{i=1}^{j} \theta\left((-1)^{i-1}\right) a_{i-1} \frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}} y^*(x,s) \right) \Bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \Omega(s) y^*(x,s)\, ds . \tag{21}$$

Даний вираз, на відміну від звичайного запису загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, містить лінійну комбінацію $2n$ фундаментальних функцій, що відносяться до різних фундаментальних систем розв'язків відповідного однорідного рівняння. Причому, дані

[1] *Нумерація формул у повідомленнях 1 і 2 є наскрізною*

системи, як і частковий розв'язок неоднорідного рівняння, виражені через узагальнену функцію Гріна $y^*\left(x,\, s\right)$. Коефіцієнтами при фундаментальних функціях у розв'язку (21) виступають невідомі параметри $y^{(n-j)}\left(x_0\right)$, $y^{(n-j)}\left(x_1\right)$, ($j=\overline{1,\, n}$) – значення функції та її похідних у точках із координатами x_0, x_1. Незважаючи на те, що кількість таких невідомих дорівнює $2n$, задача їх відшукання є цілком вирішуваною. Послідовно диференціюючи по x вираз (21) n разів, отримаємо систему з n рівнянь, яка в матричному вигляді запишеться наступним чином:

$$\vec{\mathbf{Y}}=\mathbf{F}_{x_1}\vec{\mathbf{Y}}_{x_1}+\mathbf{F}_{x_0}\vec{\mathbf{Y}}_{x_0}+\vec{\mathbf{\Omega}}, \tag{22}$$

де: $\vec{\mathbf{Y}}=\left(\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}y\left(x\right)\right)$ – вектор параметрів у точці з координатою x;

$\vec{\mathbf{Y}}_{x_1}=\left(y^{(n-k)}\left(x_1\right)\right), \vec{\mathbf{Y}}_{x_0}=\left(y^{(n-k)}\left(x_0\right)\right)$ – вектори відповідно кінцевих та початкових параметрів;

$$\mathbf{F}_{x_1}=\left(\left(-1\right)^m\sum_{i=1}^{m}\theta\left(\left(-1\right)^{i-1}\right)a_{i-1}\frac{\partial^{k+j-i}y^*\left(x,x_1\right)}{dx^k\partial s^{j-i}}\right),$$

$$\mathbf{F}_{x_0}=\left(\left(-1\right)^{m-1}\sum_{i=1}^{m}\theta\left(\left(-1\right)^{i-1}\right)a_{i-1}\frac{\partial^{k+j-i}y^*\left(x,x_0\right)}{dx^k\partial s^{j-i}}\right)$$ – матриці фундаментальних функцій;

$$\vec{\mathbf{\Omega}}=\left(\int_{x_0}^{x_1}\Omega\left(s\right)\frac{\partial^{k-1}}{dx^{k-1}}y^*\left(x,s\right)ds\right)$$ – вектор впливу зовнішнього навантаження;

$k,\, m=\overline{1,\, n}$ – індекси, що означають номери рядка та стовпця елемента матриці відповідно.

Система рівнянь (22) пов'язує значення параметрів у внутрішніх точках проміжку $\left(x_0,\, x_1\right)$ із $2n$ параметрами на його границях і в такому вигляді є матричною формою запису прямого методу граничних елементів для рівняння (20).

У коректно поставленій задачі для визначення невідомих параметрів повинно бути задано n лінійно незалежних крайових умов у вигляді лінійної комбінації початкових та кінцевих параметрів

$$\begin{aligned}&U_v\left(y\right)=\alpha_{1v}y\left(x_0\right)+\alpha_{2v}y'\left(x_0\right)+\ldots+\alpha_{nv}y^{(n-1)}\left(x_0\right)+\\&+\alpha_{(n+1)v}y\left(x_1\right)+\alpha_{(n+2)v}y'\left(x_1\right)+\ldots+\alpha_{2nv}y^{(n-1)}\left(x_1\right)=0,\end{aligned} \tag{23}$$

де $v=\overline{1,\ n}$ – індекс, що розгортає систему по вертикалі.

Із системи (23) можуть бути визначені n параметрів, хоча вони будуть залежні від решти n невідомих. Для їх визначення можна скористатися системою (21), надаючи змінній граничних значень, при $x\to x_0$ та $x\to x_1$. Таким чином, буде отримано $2n$ алгебраїчних рівнянь, чого більше ніж достатньо для визначення шуканих параметрів. Окрім цього, як уже було сказано в повідомленні 1, вирази (20) та (21) можуть бути змінені залежно від узагальненої функції Гріна $y^*\left(x,\, s\right)$. Для того, щоб отримати функцію Гріна у вигляді часткового розв'язку рівняння (18), його потрібно доповнити крайовими умовами. Із безлічі можливих умов можна виокремити декілька особливих випадків.

Якщо при розв'язуванні рівняння (18) були прийняті однорідні умови на кінці проміжку $\left(x_0,\, x_1\right)$

$$y^*\left(x,\, x_1\right)=\frac{\partial}{\partial s}y^*\left(x,\, x_1\right)=\ldots=\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}y^*\left(x,\, x_1\right)=0, \tag{24}$$

то при підстановці такого розв'язку до виразу (21) буде отриманий розв'язок рівняння (20), залежний лише від умов на початку проміжку

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}y^{(n-j)}(x_0)\left(\sum_{i=1}^{j}\theta\left((-1)^{i-1}\right)a_{i-1}\frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}}y^*(x,x_0)\right)+\int_{x_0}^{x_1}\Omega(s)\,y^*(x,s)\,ds\,. \quad (25)$$

При цьому у системі рівнянь (22) зникне перший доданок, оскільки за рахунок відповідності умовам (24) матриця фундаментальних функцій $\mathbf{F}_{x_1}$ перетвориться на нульову. Маємо:

$$\vec{\mathbf{Y}}=\mathbf{F}_{x_0}\vec{\mathbf{Y}}_{x_0}+\vec{\boldsymbol{\Omega}}. \quad (26)$$

Невідомими у (25) є n початкових параметрів $y(x_0),\ y'(x_0),\ldots,\ y^n(x_0)$ – значень функції $y(x)$ та її похідних у точці x_0. Такий вираз є основою відомого в опорі матеріалів та будівельній механіці методу початкових параметрів, а рівняння (26) є його матричною формою запису [1].

Якщо при розв'язуванні рівняння (18) будуть прийняті однорідні умови на початку проміжку $(x_0,\, x_1)$

$$y^*(x,x_0)=\frac{\partial}{\partial s}y^*(x,x_0)=\ldots=\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}y^*(x,x_0)=0, \quad (27)$$

то при застосуванні виразу (21) буде отриманий розв'язок рівняння (20), залежний лише від умов на кінці проміжку

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}y^{(n-j)}(x_1)\left(\sum_{i=1}^{j}\theta\left((-1)^{i-1}\right)a_{i-1}\frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}}y^*(x,x_1)\right)+\int_{x_0}^{x_1}\Omega(s)\,y^*(x,s)\,ds\,. \quad (28)$$

При цьому у системі рівнянь (22) зникне другий доданок, оскільки вже матриця фундаментальних функцій $\mathbf{F}_{x_0}$ перетвориться на нульову. Маємо:

$$\vec{\mathbf{Y}}=\mathbf{F}_{x_1}\vec{\mathbf{Y}}_{x_1}+\vec{\boldsymbol{\Omega}}. \quad (29)$$

Вираз (28) є залежним лише від параметрів на кінці проміжку $(x_0,\, x_1)$ і таким чином є основою для методу кінцевих параметрів [3], матрична форма запису якого відповідає (29).

Отже, відповідно до отриманих співвідношень, побудова рівнянь розглядуваних методів зводиться до знаходження узагальненої функції Гріна $y^*(x,\, s)$.

Приклад реалізації. Розглянемо застосування виразів для отримання вихідних рівнянь методів початкових та кінцевих параметрів на прикладі класичної моделі згину брусів. Диференціальне рівняння зігнутої осі бруса має наступний вигляд:

$$D\frac{d^4w(x)}{dx^4}=-\Omega(x), \quad (30)$$

де $w(x)$ – шукана функція вертикальних переміщень, D – жорсткість поперечного перерізу бруса, $\Omega(x)$ – функція зовнішнього нормального до поверхні бруса навантаження.

Приймаємо довжину бруса l. Вісь X спрямована вздовж осі бруса, і початок її співпадає з лівим кінцем бруса, жорсткість D є постійною по довжині. В такому випадку можна розглядати один проміжок, координати початку та кінця якого $x_0=0,\ x_1=l$. Узагальнену функцію Гріна рівняння (30), відповідно до (18), отримаємо, розв'язавши наступне рівняння:

$$D\frac{d^4w^*(x,s)}{ds^4}=\delta(s-x). \quad (31)$$

Загальний розв'язок рівняння (31) можна легко одержати, розділивши змінні

$$w^*\left(x,\,s\right)=\frac{1}{D}\iiiint\delta\left(s-x\right)ds+\frac{1}{6}F_1\left(x\right)s^3+\frac{1}{2}F_2\left(x\right)s^2+F_3\left(x\right)s+F_4\left(x\right)$$

або з урахуванням правил інтегрування дельта функції

$$w^*\left(x,\,s\right)=\frac{1}{D}\frac{\left(s-x\right)^3}{3!}\theta\left(s-x\right)+\frac{1}{6}F_1\left(s\right)x^3+\frac{1}{2}F_2\left(s\right)x^2+F_3\left(s\right)x+F_4\left(s\right), \qquad (32)$$

де $\theta\left(s-x\right)$ – функція Хевісайда, зміщена відносно початку координат.

Вихідне рівняння методу граничних елементів для рівняння (30) отримаємо відповідно до (21)

$$w\left(x\right)=D\sum_{j=1}^{4}\left(-1\right)^j w^{(4-j)}\left(l\right)\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}w^*\left(x,\,l\right)-$$

$$-D\sum_{j=1}^{4}\left(-1\right)^j w^{(4-j)}\left(0\right)\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}w^*\left(x,\,0\right)+\int_{x_0}^{x_1}\Omega\left(s\right)y^*\left(x,\,s\right)ds \qquad (33)$$

Крайові умови, яким повинна відповідати функція Гріна в цьому випадку можуть бути прийняті в цілому довільно. Наприклад, у [2] приймались однорідні умови на кінцях, тобто:

$$w^*\left(x,\,0\right)=\frac{d}{ds}w^*\left(x,\,0\right)=0\,,\quad w^*\left(x,\,l\right)=\frac{d}{ds}w^*\left(x,\,l\right)=0\,.$$

Функція Гріна, що відповідатиме таким умовам, є досить громіздкою

$$w^*\left(x,\,s\right)=\frac{1}{6D}\left(\left(s-x\right)^3\theta\left(s-x\right)-\frac{s^2}{l^3}\left(\left(l+2x\right)s-3lx\right)\left(l-x\right)^2\right),$$

тому в розгорнутому вигляді вираз (33) тут не наводимо.

Відповідно до (25) вихідний вираз методу початкових параметрів для рівняння (30) матиме наступний вигляд:

$$w\left(x\right)=D\sum_{j=1}^{4}\left(-1\right)^{j+1} w^{(4-j)}\left(0\right)\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}w^*\left(x,\,0\right)+\int_{x_0}^{x_1}\Omega\left(s\right)w^*\left(x,\,s\right)ds\,. \qquad (34)$$

А узагальнена функція Гріна, відповідно до (24), повинна задовольняти умовам

$$w^*\left(x,\,l\right)=\frac{d}{ds}w^*\left(x,\,l\right)=\frac{d^2}{ds^2}w^*\left(x,\,l\right)=\frac{d^3}{ds^3}w^*\left(x,\,l\right)=0\,.$$

Застосувавши наведені умови до загального розв'язку (32), отримаємо наступний частковий розв'язок $w^*\left(x,\,s\right)=\frac{1}{D}\frac{\left(s-x\right)^3}{3!}\left(\theta\left(s-x\right)-1\right)$, підставивши який до (34), одержимо вихідний вираз методу початкових параметрів:

$$w\left(x\right)=w^{(3)}\left(0\right)\frac{x^3}{3!}+w^{(2)}\left(0\right)\frac{x^2}{2!}+w^{(1)}\left(0\right)x+w\left(0\right)+\frac{1}{D}\int_{x_0}^{x_1}\Omega\left(s\right)\frac{\left(s-x\right)^3}{3!}\left(\theta\left(s-x\right)-1\right)ds\,.$$

Враховуючи фізичний зміст похідних функції вертикальний переміщень при плоскому поперечному згинанні, цей вираз можна переписати наступним чином:

$$w\left(x\right)=\frac{Q_0}{D}\frac{x^3}{3!}+\frac{M_0}{D}\frac{x^2}{2!}+\frac{\varphi_0}{D}\left(0\right)x+w_0+\frac{1}{D}\int_{x_0}^{x_1}\Omega\left(s\right)\frac{\left(s-x\right)^3}{3!}\left(\theta\left(s-x\right)-1\right)ds\,, \qquad (35)$$

де: Q_0 і M_0 – відповідно поперечна сила та згинаючий момент у початковому перерізі бруса, φ_0 і w_0 – кут повороту та вертикальне переміщення початкового перерізу.

Таким чином, відповідно до виразу (35) задача відшукання функції вертикальних переміщень класичної моделі за методом початкових параметрів зводиться до визначення невідомих початкових статичних та кінематичних параметрів. Вираз (35), на відміну від звичайної форми запису методу початкових параметрів, описує вертикальні переміщення для бруса в цілому і не потребує для свого використання розбиття бруса на окремі ділянки, в межах яких навантаження описане гладкими функціями.

Аналогічно отримаємо вихідний вираз методу кінцевих параметрів. Відповідно до (28) вихідний вираз даного методу матиме наступний вигляд:

$$w(x) = D\sum_{j=1}^{4}(-1)^j w^{(4-j)}(l)\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}w^*(x,l) + \int_{x_0}^{x_1}\Omega(s)w^*(x,s)ds. \tag{36}$$

Узагальнена функція Гріна, відповідно до (27), повинна задовольняти наступним умовам:

$$w^*(x,0) = \frac{d}{ds}w^*(x,0) = \frac{d^2}{ds^2}w^*(x,0) = \frac{d^3}{ds^3}w^*(x,0) = 0.$$

Застосувавши наведені умови до загального розв’язку (32), отримаємо наступний частковий розв’язок $w^*(x,s) = \frac{1}{D}\frac{(s-x)^3}{3!}\theta(s-x)$, підставивши який до (36), отримаємо вихідний вираз методу кінцевих параметрів для класичної моделі згину

$$w(x) = -w^{(3)}(l)\frac{(l-x)^3}{3!} + w^{(2)}(l)\frac{(l-x)^2}{2!} - w^{(1)}(l)(l-x) + w(l) +$$
$$+\frac{1}{D}\int_{x_0}^{x_1}\Omega(s)\frac{(s-x)^3}{3!}\theta(s-x)ds,$$

або з урахуванням фізичного змісту похідних функції вертикальних переміщень

$$w(x) = -\frac{Q_l}{D}\frac{(l-x)^3}{3!} + \frac{M_l}{D}\frac{(l-x)^2}{2!} - \frac{\varphi_l}{D}(l-x) + w(l) + \frac{1}{D}\int_{x_0}^{x_1}\Omega(s)\frac{(s-x)^3}{3!}\theta(s-x)ds, \tag{37}$$

де: Q_l і M_l – відповідно поперечна сила та згинаючий момент у кінцевому перерізі бруса, φ_l і w_l – кут повороту та вертикальне переміщення кінцевого перерізу.

Вираз (37) дозволяє записати функцію вертикальних переміщень, маючи статичні та кінематичні параметри кінцевого перерізу бруса. Таким чином, розв’язання задачі в цьому випадку зводиться до визначення кінцевих параметрів.

Висновки. Виходячи із загального розв’язку (21), отримано вихідні рівняння методів початкових і кінцевих параметрів. Для прямого методу граничних елементів вихідним рівнянням є, фактично, сам вираз (21). Однак, у будь-якому випадку, отримані вирази є нічим іншим як формою запису загального розв’язку диференціального рівняння (20).

Правильність отриманих співвідношень підтверджена результатами їх застосування до класичної моделі згину. Отримані співвідношення є універсальними, тож можуть бути застосовані й до інших моделей деформування, наприклад, для ітераційної зсувної моделі.

Зауважимо, що прямий метод граничних елементів у показаному підході є більш загальним у порівнянні з методами початкових та кінцевих параметрів, які фактично є його окремими випадками. Варто зауважити, що у задачах механіки деформування брусів найбільш ефективної форми прямий метод граничних елементів набуває якраз у вигляді методів початкових та кінцевих параметрів.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. *Бенерджи П.* Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

2. *Горик О.В.* Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402 с.

3. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / В.А. Баженов, В.Ф. Оробей, А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.