УДК 539.3+681.3.06

Горик О.В., доктор технічних наук, професор,
Ковальчук С.Б., асистент
Полтавська державна аграрна академія

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ДЕФОРМУВАННЯ БРУСІВ

ПОВІДОМЛЕННЯ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ПЕРЕДУМОВИ

Рецензент – доктор технічних наук, професор В.П. Дмитриков

Подано теоретичні передумови методів початкових та кінцевих параметрів, а також прямого методу граничних елементів в одновимірних задачах механіки деформування брусів. Для випадку лінійного неоднорідного рівняння n-го порядку із самоспряженим диференціальним оператором побудовано загальний розв'язок, який є спільною основою для отримання вихідних рівнянь згаданих методів розрахунку. Теоретичні співвідношення одержані, виходячи із загальних властивостей лінійних диференціальних рівнянь. Для побудови розв'язків використовуються узагальнені функції Гріна.

***Ключові слова**: лінійний диференціальний оператор, дельта-функція, функція Хевісайда, узагальнена функція, функція Гріна*

Постановка проблеми. Визначення компонентів напружено-деформованого стану в межах численних моделей деформування брусів зводиться до розв'язання одновимірної крайової задачі. Ефективним підходом до розв'язання такого роду задач є різні аналітичні методи розрахунку, такі як метод початкових параметрів, метод граничних елементів та метод кінцевих параметрів. Тому важливою є розробка й узагальнення таких методів для нових моделей деформування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, у яких започатковано розв'язання проблеми. Найбільш широко використовується метод початкових параметрів, приклади застосування якого зустрічаються практично в будь-якій літературі з опору матеріалів чи будівельної механіки. Менш розповсюджене використання одновимірного варіанту прямого методу граничних елементів, застосування якого для розв'язання задач згину брусів, описане в [1, 5]. І, практично маловідомий метод кінцевих параметрів, що описаний для першого кроку ітераційної зсувної моделі згину композитних брусів у роботі [2]. Всі ці методи є аналітичними і дають змогу отримувати точні розв'язки крайових задач. Однак відсутність спільного підходу в отриманні рівнянь згаданих методів стає проблемою при спробі розробити ті чи інші методи для нових моделей деформування або для нових типів інженерних конструкцій.

Мета і завдання досліджень. Розробка загального підходу для побудови аналітичних методів розрахунку нових задач механіки деформування брусів.

Матеріали і методи досліджень. Теоретичне дослідження властивостей лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь довільного порядку з використанням апарату теорії узагальнених функцій.

Результати досліджень. У загальному випадку розв'язання різноманітних задач механіки деформування брусів може бути зведене до визначення функції переміщень. Це пояснюється тим, що з функцією переміщень пов'язана решта параметрів деформування, як кінематичних, так і статичних, тому немає необхідності визначати їх окремо. При цьому в більшості випадків визначення функції переміщень $y(x)$ зводиться до розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами [5]

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = \Omega(x),$$

або $L[y] = \Omega(x)$, (1)

де $L[\ ] = \frac{d^n}{dx^n}[\ ] + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\ ] + \ldots + \frac{d^0}{dx^0}[\ ]$ – лінійний диференціальний оператор, породжений лівою частиною рівняння (1), $\Omega(x)$ – функція збурення, безперервна на розглядуваному проміжку (x_0, x_1).

Зауважимо, що до розв'язання рівняння типу (1) можуть бути зведені й системи лінійних диференціальних рівнянь, як це, наприклад, зроблено у [2] для кроку m ітераційної зсувної моделі згину композитних брусів.

У контексті механіки пружних стержнів, права частина рівняння (1) є ніщо інше як зовнішнє, прикладене до бруса, навантаження, а постійні коефіцієнти при похідних шуканої функції виражають характеристики жорсткості перерізу бруса або, у відповідних задачах, характеристики пружної основи.

Розглянемо детальніше праву частину рівнянь. Розіб'ємо проміжок $\left(x_0,\, x_1\right)$ точками s_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) на m рівних ділянок довжиною Δs і в межах кожної ділянки $\left(s_i < x < s_{i+1}\right)$ замінимо функцію $\Omega\left(x\right)$ рівнодійною зосередженою силою

$$\Omega_i\left(x\right) = F_i p_m\left(x,\, \xi_i\right), \tag{2}$$

де F_i – інтенсивність рівнодійної навантаження $\Omega\left(x\right)$, розподіленого в межах ділянки $\left(s_i,\, s_{i+1}\right)$, а $p_m\left(x,\, \xi_i\right)$ – функція розподілу одиничного навантаження.

Функція $p_m\left(x,\, \xi_i\right)$ у цілому є довільною і повинна дорівнювати нулю на всьому проміжку $\left(x_0,\, x_1\right)$, окрім ε-околиці точки $x = \xi_i$, $\xi_i \in \left(s_i, s_{i+1}\right)$, де є безперервною і має постійний знак. Причому:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_m\left(x,\, \xi_i\right) dx = 1. \tag{3}$$

Вважаємо (3) справедливим за будь-якого додатного ε, такого, що $\varepsilon \to 0$ при $\Delta s \to 0$.

Оскільки $F_i = \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} \Omega\left(x\right) dx$, то, використовуючи теорему про середнє, вираз (2) перетвориться наступним чином:

$$\Omega_i\left(x\right) = p_m\left(x,\, \xi_i\right) \int\limits_{s_i}^{s_{i+1}} \Omega\left(x\right) dx = p_m\left(x, \xi_i\right) \Omega\left(\zeta_i\right) \Delta s,\ \zeta_i \in \left(s_i,\, s_{i+1}\right). \tag{4}$$

Тоді у деякому наближенні функція розподіленого навантаження в правій частині рівняння (1) запишеться так:

$$\Omega\left(x\right) \approx \sum_{i=1}^{m} \Omega_i\left(x\right) = \sum_{i=1}^{m} \Omega\left(\zeta_i\right) p_m\left(x,\, \xi_i\right) \Delta s\,. \tag{5}$$

Таким чином, рівняння (2) можна записати у наступному вигляді:

$$L\left[y\right] = \sum_{i=1}^{m} \Omega\left(\zeta_i\right) \Delta s\, p_m\left(x,\, \xi_i\right). \tag{6}$$

Відповідно до принципу суперпозиції, якщо y_i є розв'язком рівняння

$$L\left[y_i\right] = p_m\left(x,\, \xi_i\right), \tag{7}$$

то розв'язком рівняння (6) є:

$$y\left(x\right) = \sum_{i=1}^{m} \Omega\left(\zeta_i\right) \Delta s\, y_i\left(x,\, \xi_i\right). \tag{8}$$

Фізичний зміст запису (8) в опорі матеріалів відомий як принцип незалежності дії сил і полягає в тому, що розподілене за певним законом навантаження можна замінити відповідною сукупністю елементарного навантаження, а переміщення, спричинені всім цим навантаження, розглядати як суму (суперпозицію) елементарних переміщень, спричинених кожним окремо взятим елементарним зусиллям.

Наведений вираз (8) є наближеним розв'язком рівняння (1), і ступінь його наближення до точного зростає при збільшенні кількості ділянок m. Якщо інтегральна сума $\sum_{i=1}^{m}\Omega\left(\zeta_i\right)\Delta s\, y_i\left(x,\,\xi_i\right)$ є збіжною на ділянці $\left(x_0,\,x_1\right)$ і має похідні n -го порядку, то при $m\to\infty$ можливий граничний перехід:

$$y\left(x\right)=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\Omega\left(\zeta_i\right)y_i\left(x,\,\xi_i\right)\Delta s=\int_{x_0}^{x_1}\Omega\left(s\right)y^*\left(x,\,s\right)ds, \tag{9}$$

де $y^*\left(x,\,s\right)$ – розв'язок рівняння (7), при $m\to\infty$.

Вираз (9) є вже точним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (2) при $x=s$.

Розглянемо рівняння (7). При $m\to\infty$, Δs прагне до нуля, тож $\varepsilon\to 0$, а $\xi_i\to s$. Тоді, з урахуванням вказаних властивостей функції $p_m\left(x,\,\xi_i\right)$, розв'язок $y^*\left(x,\,s\right)$ повинен задовольняти однорідному рівнянню

$$L\left[y^*\right]=0 \tag{10}$$

на всьому проміжку $\left(x_0,\,x_1\right)$ за винятком точки $x=s$, де він є, власне кажучи, невизначеним.

Отримання розв'язку $y^*\left(x,\,s\right)$, як функції Гріна лінійного диференціального рівняння другого порядку, при заданих крайових умовах показане, наприклад, у [4]. А у [5] наведений метод визначення функції Гріна, що відповідає однорідним початковим умовам Коші для рівняння n -го (1).

Більш загальним підходом визначення розв'язку $y^*\left(x,\,s\right)$ вважаємо розгляд рівняння (10) в сенсі узагальнених функцій. Загальним вимогам, накладеним на функцію $p_m\left(x,\,\xi_i\right)$, при деякій зміні системи координат, задовольняють різноманітні дельтоподібні послідовності, наведені у [3]. Тож, дослідимо дану функцію при необмеженому збільшенні кількості ділянок m.

Розглянемо згортку функції $p_m\left(x,\,\xi_i\right)$ з деякою безперервною функцією $\varphi\left(x\right)$. Застосовуючи теорему про середнє, з урахуванням вказаних властивостей функції $p_m\left(x,\,\xi_i\right)$, отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty}p_m\left(x,\,\xi_i\right)\varphi\left(x\right)dx=p_m\left(\eta_i,\,\xi_i\right)2\varepsilon\varphi\left(\eta_i\right)=\varphi\left(\eta_i\right)\int_{\xi_i-\varepsilon}^{\xi_i+\varepsilon}p_m\left(x,\,\xi_i\right)dx=\varphi\left(\eta_i\right),$$

де $\eta_i\in\left(\xi_i-\varepsilon;\xi_i+\varepsilon\right)$.

Переходячи, до межі $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_m\left(x,\,\xi_i\right)\varphi\left(x\right)dx=\lim\limits_{m\to\infty}\varphi\left(\eta_i\right)$, отримаємо: $\int_{-\infty}^{\infty}p_m\left(x,\,s\right)\varphi\left(x\right)dx=\varphi\left(s\right)$. Даний вираз є лінійним функціоналом, що за визначенням є δ-функцією Дірака зосередженою в точці s, тобто $\delta\left(x-s\right)$ [4].

Таким чином, отримання функції $y^*\left(x,\,s\right)$ зводиться до розв'язання рівняння

$$L\left[y^*\right]=\delta\left(x-s\right). \tag{11}$$

Загальний розв'язок такого рівняння запишеться таким чином:

$$y^*=y_0^*+y_+^*, \tag{12}$$

де y_0^* – загальний розв'язок рівняння без правої частини, y_+^* – деякий частковий розв'язок неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок (12) є узагальненою функцією Гріна диференціального рівняння (1), а частковий y_+^* – частковою узагальненою функцією Гріна (сингулярна частина) [4]. Відповідно до (12) існує безліч функцій Гріна. Всі вони будуть відрізнятися на складову y_0^*, що є розв'язком відповідного однорідного рівняння, і вигляд якої залежатиме від прийнятих умов. Отже, використовуючи (11), можна отримати як загальний, так і частковий розв'язок рівняння (1), що відповідатиме прийнятим при визначенні функції Гріна крайовим умовам.

Переходячи до конкретних прикладів, легко зрозуміти фізичний зміст функції Гріна $y^*\left(x,\, s\right)$. Наприклад, при розгляді чистого згину брусів із прямою віссю $y^*\left(x,\, s\right)$ є функцією вертикальних переміщень перерізів при дії одиничного зосередженого навантаження $q\left(x\right)=1\cdot\delta\left(x,\, s\right)$, прикладеного в точці $x=s$.

Покажемо особливість функції Гріна як узагальненого розв'язку рівняння (11). Замінимо x на s у (11) $Z\left[y^*\right]=\delta\left(s-x\right)$, де $Z[\ ]=\frac{\partial^n}{\partial s^n}[\ ]+\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}[\ ]+\ldots+\frac{\partial^0}{\partial s^0}[\ ]$. Проте δ-функція є парною [4], тож $\delta\left(s-x\right)=\delta\left(-\left(x-s\right)\right)=\delta\left(x-s\right)$. Відповідно маємо:

$$\delta\left(s-x\right)=\delta\left(x-s\right)=Z\left[y^*\right]=L\left[y^*\right]. \tag{13}$$

Отже, відповідно до (10), розв'язок рівняння (1) в загальному випадку можна отримати його згорткою з узагальненою функцією Гріна $y^*\left(x,\, s\right)$. Однак це буде частковий розв'язок $\tilde{y}$, що задовольнятиме крайові умови функції $y^*\left(x,\, s\right)$. Будь-який інший частковий розв'язок відрізнятиметься від даного на y_0 – розв'язок рівняння (1) без правої частини.

Відповідно до (9) маємо

$$\tilde{y}\left(x\right)=\int_{x_0}^{x_1}\Omega\left(s\right)y^*\left(x,\, s\right)ds=\int_{x_0}^{x_1}\Big(a_0y^{(n)}\left(s\right)y^*\left(x,\, s\right)+a_1y^{(n-1)}\left(s\right)y^*\left(x,\, s\right)+\ldots\cdot$$
$$\ldots+a_ny\left(s\right)y^*\left(x,\, s\right)\Big)ds \tag{14}$$

Інтегруємо за частинами перший доданок n раз, другий – $\left(n-1\right)$ і т.д., а останній доданок залишаємо без змін. Зводячи подібні, отримаємо:

$$\tilde{y}\left(x\right)=y^{(n-1)}\left(s\right)a_0y^*\left(x,\, s\right)\Big|_{x_0}^{x_1}-y^{(n-2)}\left(s\right)\left(a_0\frac{\partial}{\partial s}y^*\left(x,\, s\right)-a_1y^*\left(x,\, s\right)\right)\Big|_{x_0}^{x_1}+\ldots$$
$$\ldots+y\left(s\right)\left(a_0\frac{\partial^n}{\partial s^n}y^*\left(x,\, s\right)-a_1\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}y^*\left(x,\, s\right)+\ldots+a_ny^*\left(x,\, s\right)\right)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}y\left(s\right)\overline{Z}\left[y^*\right]ds, \tag{15}$$

де $\overline{Z}$ – диференціальний вираз, спряжений оператору Z.

Розглянемо випадок, коли порядок рівняння (1) – парний, а коефіцієнти при непарних похідних дорівнюють нулю: $a_1,\, a_3,\, \ldots,\, a_{n-1}=0$. Тоді рівняння (1) матиме наступний вигляд:

$$a_0y^{(n)}\left(x\right)+a_2y^{(n-2)}\left(x\right)+\ldots+a_ny\left(x\right)=\Omega\left(x\right). \tag{16}$$

Ліва частина такого рівняння є самоспряженим диференціальним виразом, особливістю якого є рівність спряжених операторів $\overline{L}=L$ [4].

Для рівняння (16) з урахуванням (15) можемо записати:

$$\tilde{y}\left(x\right)=y^{(n-1)}\left(s\right)a_0y^*\left(x,\, s\right)\Big|_{x_0}^{x_1}-y^{(n-2)}\left(s\right)a_0\frac{\partial}{\partial s}y^*\left(x,\, s\right)\Big|_{x_0}^{x_1}+\ldots$$
$$\ldots+y\left(s\right)\left(a_0\frac{\partial^n}{\partial s^n}y^*\left(x,\, s\right)+\frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}}y^*\left(x,\, s\right)+\ldots+a_ny^*\left(x,\, s\right)\right)\Big|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}y\left(s\right)\overline{Z}\left[y^*\right]ds\cdot \tag{17}$$

Зважаючи на (13), можемо записати $Z\left[y^*\right]=\delta\left(s-x\right)$. Оскільки $\overline{Z}=Z$, інтеграл у правій частині виразу (17) буде дорівнювати: $\int\limits_{x_0}^{x_1} y(s)\delta(s-x)ds = y(x)$.

Таким чином маємо

$$y(x)-\tilde{y}(x) = -y^{(n-1)}(s)a_0 y^*(x,s)\Big|_{x_0}^{x_1} + y^{(n-2)}(s)a_0\frac{\partial}{\partial s}y^*(x,s)\Big|_{x_0}^{x_1} + \ldots$$

$$\ldots + y(s)\left(a_0\frac{\partial^n}{\partial s^n}y^*(x,s) + \frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}}y^*(x,s) + \ldots + a_n y^*(x,s)\right)\Big|_{x_0}^{x_1}. \qquad (18)$$

Однак різниця загального та часткового розв’язку лінійного диференціального рівняння, є розв’язок відповідного однорідного рівняння $y_0(x) = y(x) - \tilde{y}(x)$.

Маючи деякий частковий розв’язок у вигляді (9) та розв’язок однорідного рівняння у вигляді (19), можемо побудувати загальний розв’язок рівняння (1):

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^j y^{(n-j)}(s)\left(\sum_{i=1}^{j}\theta\left((-1)^{i-1}\right)a_{i-1}\frac{\partial^{j-i}}{\partial s^{j-i}}y^*(x,s)\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1}\Omega(s)y^*(x,s)ds, \qquad (19)$$

де $\theta\left((-1)^{i-1}\right)$ – функція Хевісайда, яка виключає складові, що відповідають непарним похідним у рівнянні (1) і приводить розв’язок у відповідність до рівняння (16).

У такому вигляді (19) відповідає вихідному виразу прямого методу граничних елементів для рівняння (16). Як бачимо, вираз (19) містить $2n$ невідомих у вигляді значень функції та її похідних у точках із координатами x_0, x_1, але при підстановці відповідної узагальненої функції Гріна $y^*(x,s)$ кількість невідомих у (19) можна зменшити до n, залежно від крайових умов, прийнятих при її визначенні. Із безлічі варіантів функцій Гріна, що можуть бути отримані при розв’язанні відповідного рівняння (11), можна виокремити декілька особливих випадків.

Якщо при розв’язуванні рівняння (11) були прийняті однорідні умови на кінці проміжку, то при підстановці такої функції Гріна до виразу (19) буде отриманий загальний розв’язок рівняння (16), залежний лише від умов на початку проміжку, що відповідатиме методу початкових параметрів. Якщо при визначенні функції Гріна прийняті однорідні умови на початку проміжку, то буде отримано вираз, залежний лише від умов на кінці проміжку, що відповідатиме методу кінцевих параметрів.

Висновки. Розроблено загальний підхід до розв’язання задач механіки деформування брусів для класу задач, що зводяться до розв’язання диференціальних рівнянь із самоспряженими диференціальними операторами. До цього класу задач відносяться практично всі види деформацій призматичних брусів. Загальний розв’язок у вигляді виразу (19) є базовим для отримання вихідних рівнянь того чи іншого аналітичного методу розрахунку. Застосування даного підходу до рівнянь, що містять похідні непарного порядку (із не самоспряженими диференціальним операторами), приводить до інтегральних рівнянь. Тому для задач, що зводяться до розв’язання рівнянь із не самоспряженими диференціальними операторами, потрібні інші підходи.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. *Бенерджи П.* Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд; пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. *Горик О.В.* Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.
3. *Кеч В.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску; пер. с рум. О.Е. Булгару; под ред. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
4. *Неймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Неймарк. – М.: Наука, 1969. – 528с.
5. Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов / В.А. Баженов, В.Ф. Оробей, А.Ф. Дащенко [и др.] – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.