межити використання сильно забрудненого РР гною. Замінивши його мінеральними добривами і торфом.

В максимальній кількості необхідно обмежити використання низькопродуктивних пасовищ і розширити площі сіяних трав. Для корму молочних тварин необхідно використовувати корма з орних угідь, і в першу чергу коренеклубні, овочі, зернофураж, силос.

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ХІМІЧНИХ ТА БІОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ І ПОРЯДКУ

Славний Б., студент 3-го курсу*

**Науковий керівник Раздуй О.М. ст. викладач кафедри вищої математики*

За допомогою диференціальних рівнянь можна моделювати велику кількість процесів, що відбуваються в природі та суспільстві. Для деяких процесів така модель є першим наближенням в «ідеальних» умовах. Процеси в реальних умовах описуються більш складними математичними моделями.

Наведемо деякі приклади:

1. Радіоактивний розпад. Нехай на момент часу $t=0$ є N_0 ядер радіоактивного ізотопу. Кількість розпадів за одиницю часу називають активністю A певного джерела радіоактивного випромінювання. За означенням активності маємо:

$$A=-\frac{dN}{dt}$$

Знак мінус вказує про зменшення числа радіоактивних ядер з часом. Експериментально визначено, що активність пропорційна числу ядер цього радіоактивного ізотопу, тобто має місце рівняння:

$$\frac{dN}{dt}=-\lambda N,$$

де λ - стала розпаду.

Рівняння $\frac{dN}{dt}=-\lambda N$ є однорідним лінійним диференціальним рівнянням І порядку, що має такий частинний розв'язок:

$$N=N_0e^{-\lambda t}.$$

Дана формула визначає основний закон радіоактивного розпаду.

Активність джерела випромінювання з односортними радіоактивними нуклідами змінюється з часом за таким законом:

$$A=\lambda N=\lambda N_0e^{-\lambda t}.$$

2. Закон розмноження бактерій. Розглядається такий закон розмноження бактерій, коли швидкість поділу бактерій $\frac{dN}{dt}$ пропорційна кількості

бактерій N у певний момент часу t. Диференціальне рівняння закону розмноження має такий вигляд:

$$\frac{dN}{dt} = kN,$$

де k - коефіцієнт розмноження цього виду бактерій при заданих умовах.

3. Концентрація деякого лікарського препарату в крові після прийому перорально є функцією часу $y(t)$, що задовольняє диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = 10t^7 e^{-t^2} - 2ty.$$

Знайдемо вираз для цієї функції, якщо $y(t=0) = 0$.

Запишемо диференціальне рівняння таким чином:

$$\frac{dy}{dt} + 2ty = 10t^7 e^{-t^2}.$$

Розв'язок шукаємо за методом Бернуллі:

$$y = uv; \quad \frac{dy}{dt} = v\frac{du}{dt} + u\frac{dv}{dt}$$

Підставляємо у рівняння і одержуємо:

$$v\frac{du}{dt} + u\left(\frac{dv}{dt} + 2tv\right) = 10t^7 e^{-t^2}.$$

Відшукаємо функцію v:

$$\frac{dv}{dt} + 2tv = 0; \qquad \frac{dv}{v} = -2tdt; \qquad \ln|v| = -t^2; \qquad v = e^{-t^2}.$$

Знаходимо функцію u :

$$e^{-t^2}\frac{du}{dt} = 10t^7 e^{-t^2}; \; du = 10t^7 dt; \; u = \frac{5t^8}{4} + C.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння такий:

$$y = \left(\frac{5t^8}{4} + C\right)e^{-t^2}.$$

З початкової умови знаходимо сталу інтегрування: $0 = (0 + C)e^0$; $C = 0$ та одержуємо, що концентрація лікарської речовини у крові змінюється з часом наступним чином:

$$y = \frac{5}{4}t^8 e^{-t^2}.$$

4. Розв'яжемо тепер задачу аналогічного змісту, але за умови, що концентрація іншого лікарського препарату в крові інше диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = 6t^2 e^{-\sqrt{t}} - \frac{y}{2\sqrt{t}}.$$

Знайдемо функцію залежності концентрації препарату у крові від часу. Використовуючи метод Бернуллі, послідовно отримаємо:

$$\frac{dy}{dt}+\frac{y}{2\sqrt{t}}=6t^2e^{-\sqrt{t}}; \qquad y=uv; \quad \frac{dy}{dt}=u'v+uv';$$

$$u'v+uv'+\frac{uv}{2\sqrt{t}}=6t^2e^{-\sqrt{t}}; \qquad u'v+u\left(v'+\frac{v}{2\sqrt{t}}\right)=6t^2e^{-\sqrt{t}}.$$

Відшукаємо функції u, v :

$$v'+\frac{v}{2\sqrt{t}}=0; \frac{dv}{dt}=-\frac{v}{2\sqrt{t}}; \frac{dv}{dt}=-\frac{v}{2\sqrt{t}}; \int\frac{dv}{v}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}; \ln|v|=-\sqrt{t}; v=e^{-\sqrt{t}};$$

$$u'e^{-\sqrt{t}}=6t^2e^{-\sqrt{t}}; \frac{du}{dt}=6t^2; du=6t^2dt; \int du=6\int t^2dt; u=2t^3+C.$$

Загальний розв’язок задачі:

$$y=\left(2t^3+C\right)e^{-\sqrt{t}}$$

Використаємо початкові умови і запишемо частинний розв’язок:

$$y\left(0\right)=0; \quad 0=\frac{C}{e^0}; \; C=0; \quad y=2t^3e^{-\sqrt{t}}$$

Побудувавши інтегральні криві розв’язків останніх двох рівнянь, можемо порівняти характер всмоктування у кров першого та другого лікарських препаратів та зробити висновки щодо їх використання в залежності від поставлених медичних задач.

5. Популяція бактерій збільшується таким чином, що відносний приріст у момент часу t (в годинах) протягом проміжку часу dt становить величину $\frac{1}{1+4t}dt.$ Початкова чисельність популяції становить $x(0)=1000$. Відшукаємо, якою буде популяція за 4 години.

За умовою задачі динаміка чисельності популяції з часом описується диференціальним рівнянням з розділеними змінними:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{1+4t}.$$

Записуємо загальний інтеграл цього диференціального рівняння:

$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{1+4t}; \qquad \ln|x|=\frac{1}{4}\ln|1+4t|+\ln C.$$

Тут логарифм довільної сталої є теж довільною сталою. Загальний розв’язок одержуємо в такому вигляді:

$$x=C\sqrt[4]{1+4t}.$$

За початковою умовою одержуємо частинний розв’язок:

$$x=1000\sqrt[4]{1+4t}.$$

Наведені задачі є свідченням того, що при моделюванні багатьох процесів у біології та медицині широко використовуються диференціальні рівняння.